

极射投影法与极图的演变过程及其应用

The Evolution and Application of Stereographic Projecting Method and Pole Figure

供稿|杨平 / YANG Ping

内
容
导
读

极射投影法是直观的三维方向关系表达法，极射投影图使其变为二维面上的关系。极图除含极射投影的含义外，还包含样品坐标系的信息，涉及样品坐标系的取向或方位，即需要标出晶体坐标系相对于样品坐标系的旋转关系。在晶体学、形变、再结晶及相变等知识的认知学习中使用了用于描述材料内部晶体学方向分布关系或规律的极射赤面投影法与极图，材料科学研究中涉及晶体学理论、现象与规律时常常用到这些图。学生初次学习很难体会到它们有多大的用途并且普遍认为这是个认知难点，而极射赤面投影图与极图两个概念也常常相互混淆。本文从极射赤面投影基本概念入手，介绍了极射投影法的演变历史、相关科学人物故事以及其在数学、几何学、绘图、地质学、摄影技术中的应用，希望有助于分清极射投影图与极图两者的相似处与不同点。通过极射投影图在教学中的应用举例，进一步介绍了极射投影图与极图在材料科学中的应用，达到有针对性解决问题，希望不仅对普通读者，也对初次接触这种方法的研究人员能有所帮助。

晶体学涉及晶体本身的性质(如对称性和各向异性)及晶体在外部条件变化时的结构变化(如温度、压力、磁场、电场等)。描述晶体本身及其变化的最常用的工具之一就是极射赤面投影法或极射投影图。《材料科学基础》课程是材料专业最基本的理论课程，涉及的材料主要是晶体。如果问刚学过《材料科学基础》课程的学生，哪些概念相对难? 苦涩难懂? 肯定会有不少同学说，极射投影图难懂，有效使用更难。如果问及这个工具用于哪些场合? 同

学们基本能答出用于确定不同晶体学方向夹角的测定，用于多晶织构的表达。至于熟练应用，就很难达到，或令人望而生畏了。针对此现象，作者曾编辑出版了《材料科学名人典故与经典文献》^[1]一书，收集整理了极射投影图方法的演变历史及在不同领域的应用，并在课程教学中予以展示。由于作者长期从事的材料学研究中频繁用到极射投影图和极图，因此充分体会到其直观性和便利性;此外，随着科技的不断进步，特别是计算机及软件开发和

作者单位: 北京科技大学材料科学与工程学院, 北京 100083

测试技术的进步, 晶体学这个既传统又成熟但其应用还远不普及的学科, 越来越频繁地被应用, 极射投影图也越来越广泛地得以使用。在此结合作者所收集的资料和自己的科研工作讨论极射投影法和极图的“神奇”、有趣和广泛应用, 希望引起读者的兴趣, 并在研究工作中注重其应用。

极射赤面投影的基本概念

图 1 给出极射赤面投影原理图。极射赤面投影方法是由单位球的中心出发的任一晶向, 与球面相交(球面投影概念)于 A 点, 该交点 A 向单位球的南极(下半球)投影, 投影线 AS 与赤道面的交点 ' A ' 就

是该晶向三维方向的二维坐标或表达。类似地可做出三维晶体方向 B (实际是原点到 B 的方向) 在二维赤道面的投影位置 ' B '。 A , B 方向在空间的夹角就等于 ' A ' 和 ' B ' 在平面投影图中的夹角, 该投影过程是保角的, 这个角度要用吴氏网 (Wulff net) 来度量, 见图 1(c)。具体方法是, 将 ' A '、' B ' 投影点转到吴氏网的经线上, 量出它们之间的纬度角值。由极射赤面投影制作过程及使用的吴氏网可知, 极射赤面投影图与地球仪、地理、航海有密切联系, 甚至可以说是由其演变而来。吴氏网上的经线是不同倾斜角度并过球心的大圆的极射投影, 而吴氏网上的纬线是垂直于赤道面的一系列小圆的极射投影线。

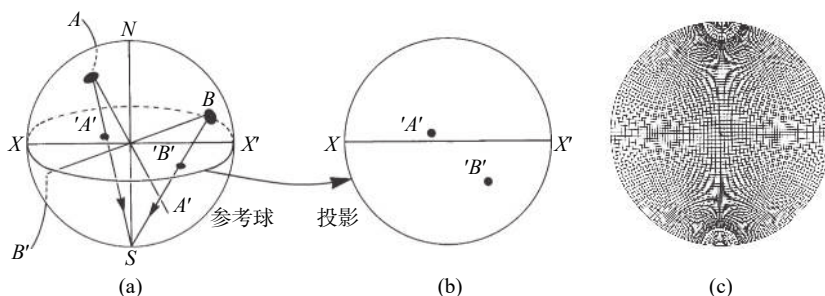


图 1 极射赤面投影法及吴氏网: (a) 北半球的 A 、 B 极点和下目测点 S 的连线在赤道面(投影面)相交; (b) ' A ' 和 ' B ' 点为 A 和 B 极点的投影图; (c) 吴氏网

在晶体学中, 为了一目了然地看出晶体中所有重要晶面的相对取向及对称关系, 通常使用的方法是制作极射赤面标准投影图。一般选择某个低指数晶面(例如 (100) 、 (110) 、 (111) 等) 作为投影面(即赤道面), 将其他重要的晶面的极点投影到这个面上(图 2(c))。图 2 是立方系 (001) 标准投影图的制作过程及其标准投影图。能看出绕中心 $\langle 001 \rangle$ 轴的 4 次对称性及镜面对称关系。图 2(d) 是作者 2005 年在比利

时鲁汶参加国际材料织构会议参观鲁汶大学材料学院时见到的极射投影法教具, 是图 2(b) 的实物化。如果要求出极射图(图 2(c)) 中某一位置点对应哪个 (hkl) 晶向指数是多少? 只需量出其与 3 个 $\langle 100 \rangle$ 轴的交角, 求出 3 个角度余弦之比并互质化即可^[2]。反之, 如果要确定一个 (hkl) 极点或晶向在标准投影图中的位置, 只需求出其与三个 $\{100\}$ 晶轴的夹角, 在极射投影图中画出对应角度的大圆及两个纬线, 其

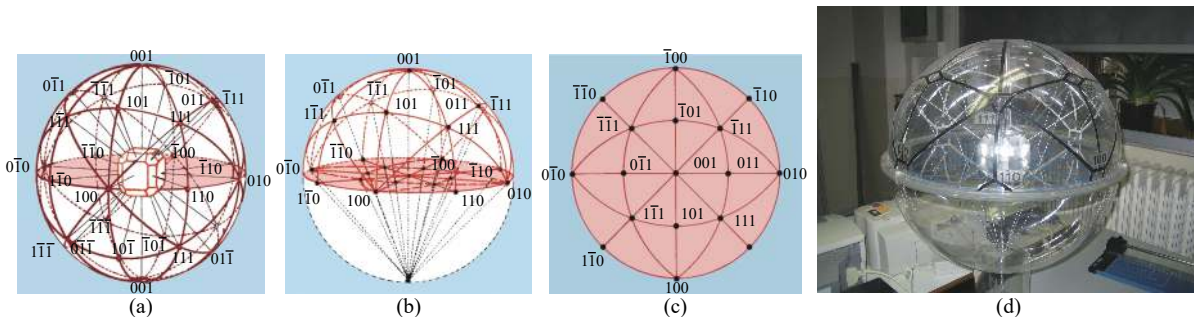


图 2 立方晶系 (001) 标准投影图的制作: (a) 球面投影的情况; (b) 极射赤面投影; (c) (001) 标准投影图; (d) 鲁汶大学极射投影图教具(作者于 2005 年国际材料织构会议期间拍摄)

惟一的交点就是 (hkl) 极点位置。

在学习极射投影法时，应注意区分极射投影图与极图的差异。极图是在讲述形变织构、再结晶织构知识点时使用的术语。不了解织构的人可能认为极图就是极射投影图的缩写，其实极图除含极射投影的含义外，还包含样品坐标系的信息，即标出晶体坐标系相对于样品坐标系的旋转关系（这就是晶体取向的定义）， $\{100\}$ 极图指画出所有不同取向晶粒的 $\{100\}$ 投影点、又表达出样品坐标系与晶体坐标系旋转关系的极射投影图（见后文的举例）。很多情况下，使用者不关心样品坐标系，只关心晶体坐标系，因此就用常见的极射投影图。而一旦涉及样品坐标系的取向或方位，就要用极图。

不同领域的研究者还应注意极射投影法与等面积投影法的差异^[3]。矿物学、晶体学中主要分析各种晶体学方向或晶面间的关系，要在二维图上保持三维空间的角度关系，所以习惯使用等角度投影的吴氏网 (Wulff net) 来度量；而地质学、地理学、测绘学中常需要描述地球上不同区域或国家大小比例间的关系，所以习惯用等面积投影的方式作图或度量，这就要用到等面积投影的 Lambert 网或 Schmidt 网^[4]。图 3 给出 (a) 等角度投影吴氏网 (Wulff 网) 与 (b) 等面积投影 Schmidt 网的差异。绘制两种网的数学公式的差异见文献 [3]。

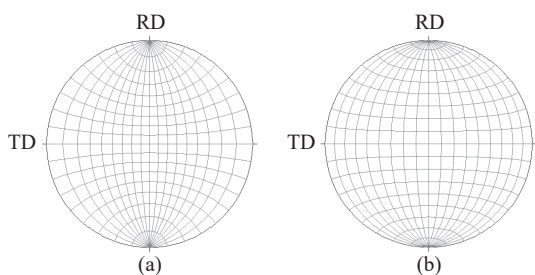


图 3 (a) 等角度投影的吴氏网 (Wulff 网) 与 (b) 等面积投影的 Schmidt 网

极射赤面投影法应用历史

极射投影图的历史演变

由构造极射赤面投影图时提到的南极、北极、赤道，就不难想象，这种方法是从地理学演变过来的。然而在天体学中极射投影法的应用比地理学还

早。早在公元前 125 年，古代最伟大的天文观察家、三角几何学的开创者 Hipparchos (希帕克斯) 最先引入极射投影法^[3]，大致出现在古埃及时代，最初称为平面球形投射。托勒密 (Ptolemy) 的“星图” (Planisphaerium) 是现存文献中最早描述极射投影的著作 (参见 http://www.princeton.edu/~achaney/tmve/wiki100k/docs/Stereographic_projection.html，感兴趣的读者可以查阅)。该著作最初是用古希腊语书写的，并且是阿拉伯译文中保存下来的科学著作之一。12 世纪，这部著作由阿拉伯语译成拉丁语。它的最重要的用途之一是描述天体。平面球形图这个术语仍然被用于这类图形。人们认为最早的世界地图是在 1507 年由 Gualterious Lud 创造的，它所依据的就是球的极射投影，即把每个半球映射为一个圆盘。在 17 世纪和 18 世纪，极射投影图的赤道常用于表示地图的东半球和西半球。图 4(a) 为 1500 年代比利时画家鲁宾斯 (Rubens) 的一幅画，画出了天体球及其在地面上的影子，恰好是一个三维球和其二维投影图。图 4(b) 为天文学家 al-Zarquâlâ 于 1070 年用的万用天体观测仪 (星盘)^[3]。左侧为极射投影网，右侧为固定格式化的星体指针。上部是天体的北极，投影面是过天体极和夏至、冬至位置的大圆。该大圆被昼夜平分的天体赤道面等分。图 4(c) 为中国古代天体测量学及天文仪器 (参见 <https://baike.so.com/doc/8267375-8584364.html>)。

作者曾有集邮的爱好，留学德国期间也收集了一些德国的邮票，恰好有一套 1500—1700 年收藏家所拥有的天体仪与地球仪藏品的邮票，见图 5。天体仪可以用于确定宇宙中各星球的相对位置，也可用于确定 24 个节气和每天 24 小时的时间点。

天体仪是天体定位的工具，是指一个以地球质心 M 为中心，半径 r 为任意长的一个假想的球体。其目的是将天体沿观测者视线投影到球面上 (球面投影的概念)，以便于研究天体及其相互关系。有时还将天球球心设置在某些特殊点，如地心和日心，相应的天球分别称为地心天球和日心天球。天文航海按自身的需要，把地心作为天球的球心。星星从东方的地平线爬上来，爬到最高点 (中天)，然后往西方沉下去。看起来就像整个天球围绕着地球旋转一样。古时候人们为了辨别方向、确定时间，创造出

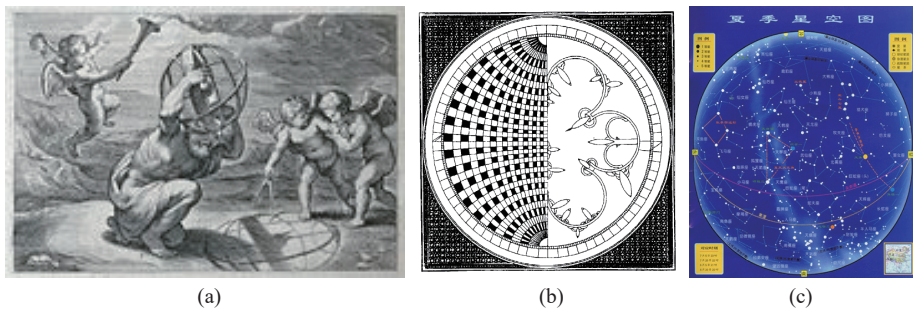


图4 天体学中的极射投影法: (a) 比利时画家鲁宾斯 (Rubens) 画出了天体球及其在地面上的影子; (b) 天文学家 al-Zarqâlâ 于 1070 年用的万用天体观测仪 (星盘)^[3]; (c) 中国古代天体测量学及天文仪器



图5 天球仪和地球仪邮票 (1972 年出版, 实物收藏在德勒斯顿 Dresden 国家数学-物理沙龙中): (a)1279 年的阿拉伯天球仪; (b)1568 年 J. Praetorius 地球仪; (c)1586 年 J. Reinhold 和 G. Roll 的球形钟; (d)1590 年 J. Bürgi 的球形钟; (e)1687 年 J. Moeller 的 Armillar 球; (f)1690 年徽章学的天体球

日晷和圭表来。古代天文学家为了测定星星的方位和运动, 又设计制造了许多天体测量的仪器。通过对星空的观察, 将星空划分成许多不同的星座, 并编制了星表。通过对天体的测量和研究形成了早期的天文学。直到 16 世纪中叶, 哥白尼提出了日心体系学说, 从只是单纯描述天体位置、运动的经典天体测量学, 发展成寻求造成这种运动力学机制的天体力学。

天球坐标系中有几种不同的坐标表达方式 (参见 <https://baike.so.com/doc/8520420-8840895.html>), 分别为地平坐标系、赤道坐标系、时角坐标系、黄道坐标系。地平坐标系与我们地球的赤道面对应。赤道坐标系中的天赤道对应太阳绕地球转动组成的轨迹面 (实际是地球绕太阳转), 也叫黄道, 见图 6(a)。天赤道的法线与球的交点是北极星位置。春分点、秋分点、夏至及冬至, 正好平分天赤道圆。仔细观察可见, 极射投影图中涉及天体学和地理学时, 赤道面不是水平放置的, 涉及地质学和晶体学时赤道面是水平放置的。图 6(b) 为 Blaeu 1624 年画出的极

射赤道投影图^[3]。倾斜的直线为黄道线, 即太阳出现及消失的点, 左下角为夏至点, 右上点为冬至点, 分别对应摩羯座和巨蟹座。该图收藏于英国伦敦科学博物馆。

1823 年 F.E. Neumann 最先将极射投影网用于矿物学^[3]。1892 年俄罗斯的晶体学家 Federov 因发明了万用测角显微镜台和 1902 年 Wulff 网的引入而共同推广了其使用, 见图 7。

最早的织构在极图 (这时同时涉及样品坐标系与晶体坐标系) 上的表示: 德国柏林大学的 Wever 于 1924 年用极图表示了用 X 射线劳厄照相法获取的轧制铝和轧制铁的织构信息^[5]。

图 8 是 2012 年诺贝尔化学奖得主、以色列的材料学家 Shechtman 1982 年发表准晶文章中使用的极射投影图表示的 5 次旋转反演对称性 (经典的晶体只有 1、2、3、4、6 次轴对称性)^[6]。

简而言之, 极射投影法最早在天体学中应用, 随后在航海、制图学和测量学中的应用, 然后才用于矿物学和晶体学以及地质学中, 此外也在数学、

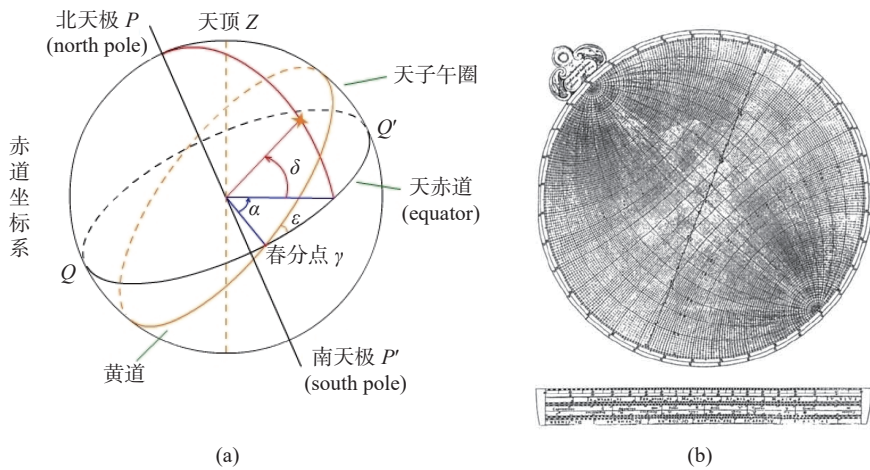


图6 天球坐标系的赤道坐标系^[7](a)和 Blaeu 1624 年画出的极射赤道投影图^[3](b)

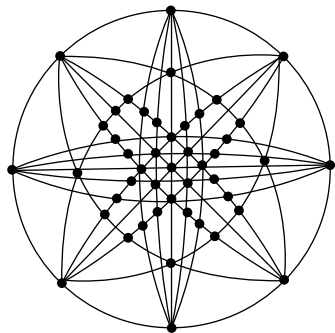


图7 1823 年 Neumann 在地质学中第一次使用的极射赤道投影法^[3]摄影学等领域应用。

极射投影技术的相关人物

与晶体学(含矿物学与材料科学)领域使用极射投影技术相关的人物除了俄罗斯的费德洛夫(Fedorov)、英国的布拉格(Bragg)父子外,这里仅介绍使用极射投影网的两位人物,俄罗斯的吴尔夫(Wulff)和奥地利的施密特(Schmidt),两种投影图网格工具以他们的名字命名。

俄罗斯矿物学家、莫斯科国家大学教授乔治·吴尔夫(Georgii Yuri Viktorovich Wulff (1863—1925))不是最早使用 Wulff 网的,而是他于 1902 年最早制作了最高“分辨率”的 Wulff 网,即直径 20 cm、每隔 2°一个格。吴尔夫(照片见图 9,参见 http://de.wikipedia.org/wiki/George_V._Wulff)毕业于华沙大学,导师是德国著名矿物学家 von Groth^[3]。他以对几何晶体学的研究著称。Wulff 第一次在俄罗斯将 X 射线用于晶体的实验研究。在 Bravais 和 Fedorov 理论基础的

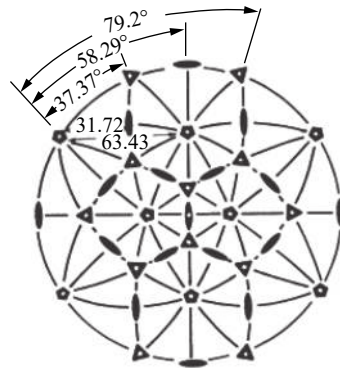


图8 以色列诺贝尔奖获得者 Shechtman 用极射投影图表示准晶的 5 次对称性^[6]

基础上,他发展了一种新的理论来预测在晶体生长过程中平衡态时的晶面情况,或者晶体溶解时哪个晶面先消失(称吴尔夫构造理论)。1908 年建立的吴氏网是他发现的一种立体投影图及晶体几何测量工具。



图9 G V Wulff

极射投影法测量的另一个代表人物是奥地利地质学家和岩相学家 Walter Schmidt(1885—1945, 参见 [https://de.wikipedia.org/wiki/Walter_Schmidt_\(Geologe\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Walter_Schmidt_(Geologe)))。他于 1907 年毕业于奥地利维也纳大学, 学习地质学和动物学, 获博士学位。随后又到里奥本大学 (Montanistic University of Leoben) 学习, 于 1912 年获 Diploma 学位。1915 年为地质学讲师, 1918 年为矿物学和岩相学副教授。1923 年在里奥本大学做完讲师资格工作, 1926—1927 年在德国哥廷根大学, 1927 年在德国 Tübingen 大学任副教授, 1930 年任德国柏林技术大学矿物学及岩相学教授。二次世界大战结束时在柏林战役中死亡。他是地质领域构造工程的代表人物, 1925 年与 Bruno Sander 一起设计了用于地质领域测量的 Schmidt 网。然而, 早在 1772 年瑞士数学家及物理学家 Johann Heinrich Lambert (1728—1777) 提出等面积投影图 (所以等面积投影图也称 Lambert 图), 主要用于制图学, 即绘制地球表面, 在投影图中所有国家都能按比例地保持其尺寸大小。1917 年 Schmidt 使用了等面积投影图分析地质学中的岩石组织, 这开辟了其应用的一个全新的领域。1925 年 Sanders 将等面积投影图网称为 Schmidt 网^[4]。

极射投影法的应用

以下简单介绍极射投影法在各领域的广泛应用 (参见 http://www.princeton.edu/~achaney/tmve/wiki100k/docs/Stereographic_projection.html, 感兴趣的读者可以查阅), 随后再介绍其在作者教学中的应用。

在不同学科中的应用

> 在数学、几何学中的应用

(1) 用于复变函数; (2) 用于线和平面 3 维的可视化; (3) 用于多面体的可视化; (4) 用于算法几何。

> 在绘图中的应用 (Cartography)

极射投影可用于映射地球。一般来说, 统计方面应用更倾向于使用保面积映射投影, 因为他们在积分学上有很好的应用; 而用于导航时则更倾向于使用保角映射投影。当投射集中在地球的北极或南极时, 它将有额外的特性, 即将经线表示成过原点到圆周的射线上, 将纬线表示成集中或环绕于原点的圆周上, 见图 10。

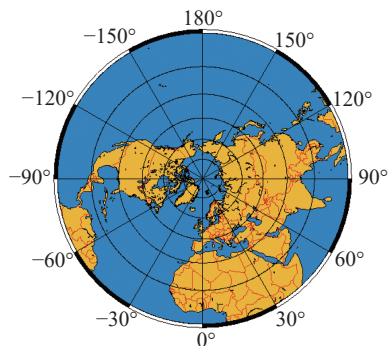


图 10 地球北半球的球极平面投影

> 在地质学中的应用

在构造地质学中, 应用下半球的极射投影描绘平面和线的取向。人们关注的是岩石的面型特征-褶皱 (foliation), 而面型特征又由线型特征组成, 称为线理 (lineation)。比如, 面型特征断层 (Fault) 包含线型特征是带有岩石间相对摩擦纹理的光滑表面 (slickensides), 见图 11。这些在不同尺度范围内的线和面的取向就可以用上述所说的线和面的显像方法来描绘。与晶体学中使用极射投影相似的是, 地质学中的平面也用它的法线 (极点) 来表示; 不同的是, 地质学中采用的是南半球而不是北半球 (因为人们关注的问题发生在地球表面之下)。

图 12 是 1976 年 7 月 28 日中国唐山大地震的 P 波初动符号和震源机制解答参数用吴尔夫网表示的结果 (参见 <https://bkso.baidu.com/item/震源>)。

> 在摄影术中的应用 (Photography)

鱼镜头利用极射投影方法, 以获得更宽的视野 (即广角的概念)。利用保角的极射投影的鱼镜头优于利用保面积的极射投影, 因为保角的极射投影可使接近边缘的区域更好地保留他们的形状, 并且直线很少被投影成弯曲线, 见图 13。

极射投影图在作者教学中的应用举例

由于本科课程学时有限, 课上难以也没有必要展示极射投影的广泛用途, 但可以在研究生与晶体学有关课程中进一步介绍。由此作者在研究生“材料结构”课程教材《工程材料结构原理》^[7] 中编入相应内容。将科研体会放在其中, 将小软件送给学生训练加速理解; 在企业技术人员的培训中, 将各方面应用放在一起比较, 培养归纳整理、总结的能力。

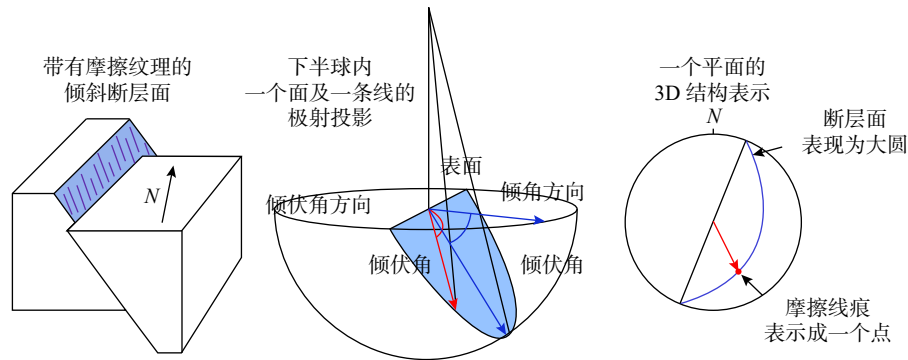


图 11 断层面与断层痕线的极射投影

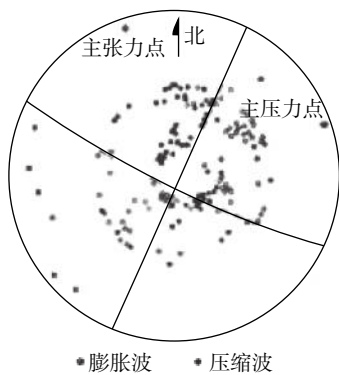


图 12 中国唐山地震主震节面解在吴尔夫网上的表示



图 13 球状全景图

图 14 为用极射投影图表示晶体学点群对称性特征的例子，是德国晶体学家 Hessel 提出的 32 种点群中第 8、9 号点群在极射图中的表达。

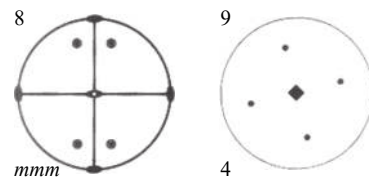


图 14 Hessel 的 32 种点群中第 8、9 号点群 (mmm 和 4 次轴) 的极射赤面投影图表示^[8]

图 15(a) 是用极射投影图表示闭形单晶外表面相同的 $\{120\}$ 等效晶面对称关系及位置的例子。立方晶体中 1 种闭形的立体形态 (五角十二面体) 及其极射赤面投影，图 15(b) 是作者购置的 FeS_2 单晶实物，与图 15(a) 示意图对应。

图 16 为用极射投影图表达晶体塑性变形时不同滑移系开动行为的例子。对应一个 $\{100\}\langle 011\rangle$ 取向晶体的 12 个滑移系，每个滑移系由一个 $\{111\}$ 极和 $\{110\}$ 极连线组成，两个极连成线。其中 4 个滑移系取向因子最大而首先开动 (图中的实线)。面心、体心立方结构的滑移系位置一样。在极图上讨论取向变化规律。两个滑移系有相同的滑移方向称共向滑移，极图上有相交的 $\{110\}$ 点 (BCC 金属)；两个滑移系有相同的滑移面称共面滑移系，在极图上有相交的 $\{111\}$ 极点 (FCC)。这个几何图既告诉我们哪些滑

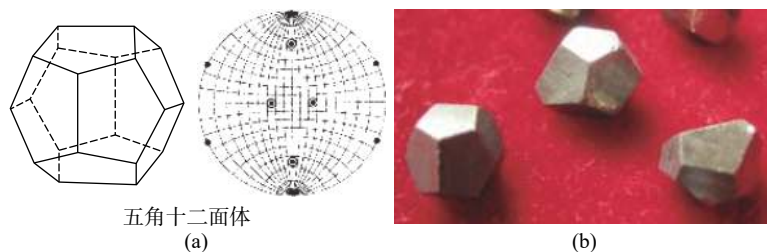


图 15 (a) 立方晶体中闭形的五角十二面体单晶立体形态及其极射赤面投影 (12 个 $\{120\}$ 面围成)^[8] 和 (b) FeS_2 单晶实物

移系开动，又指导我们分析开动滑移系转动的方向和为什么这个取向随变形的进行，取向却是稳定而不改变的。

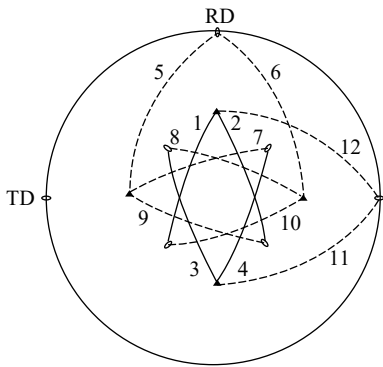


图 16 立方晶系变形时各{111}<110>滑移系的极图^[9]

图 17 为用极图表示不同取向 BCC 结构 Fe-3Si 单晶轧制时沿板厚度方向变形均匀性的差异。冷轧时不同单晶的取向变化显示不同的取向稳定性；旋转立方取向 (100)[011] 晶体轧制后，板材的表层出现绕横向轴转动，而板中心层取向不变，见图 17(a) 和 (b)。(112)[1 $\bar{1}$ 0] 取向的单晶冷轧后，表层与中心层取向都保持稳定不变，见图 17(c) 和 (d)。说明两种轧制稳定的取向抵抗剪切力的能力不同。

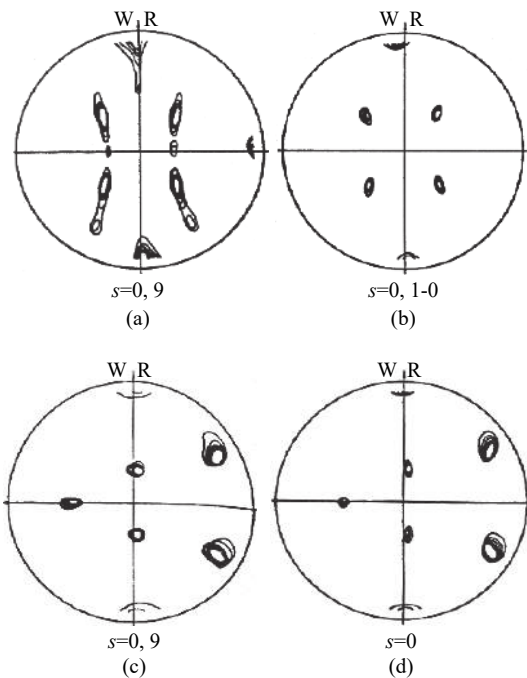


图 17 (100)[011]、(112)[1 $\bar{1}$ 0] 取向 Fe-3Si 单晶轧制 50% 后表层、中心层的取向分布, {110}极图^[9]

图 18 为在极图上表示高层错能的 Al-1.3Mn 合金轧制再结晶初期后出现的 3 阶孪晶关系，是作者 1994 年在德国亚琛工业大学攻读博士学位阶段用 EBSD 技术检测到的，测定时间 1 min 左右，测定时自然不知道各晶粒之间是什么关系，但一旦用 {111} 极图显示出来，便能确定其是由 A→B→C，B→D 的孪生关系；该结果发表在文章 [10] 中。

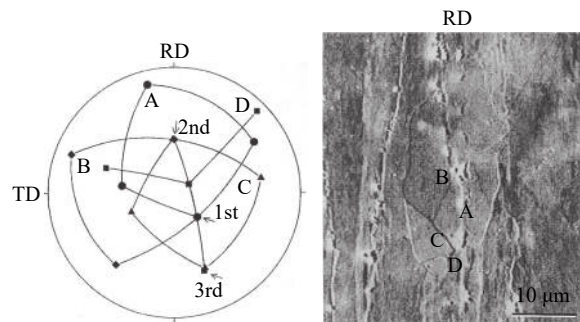


图 18 Al-1.3Mn 合金轧制再结晶初期组织中 3 阶孪晶^[10]。

图 19 为用 {100} 极图的方式表示面心-体心结构晶体按 K-S 取向关系相变时各变体的位置、数目及分布。一个面心立方结构的 {100}<001>立方取向晶粒按 K-S 关系可转变为 24 个体心立方结构的马氏体变体。每个取向有 3 个 {100} 投影点，24 个取向共 72 个点。分属于 3 种类型取向，每组 8 个取向。第一组近似为 45° 旋转立方取向 {100}<011> (图中 1-8#)，第二组近似为反高斯取向 {110}<1 $\bar{1}$ 0> (图中 9-16#)，第三组近似为高斯 Goss 取向 {110}<001> (图中 17-24#)。这三组取向对应不同的性能，问题是轧

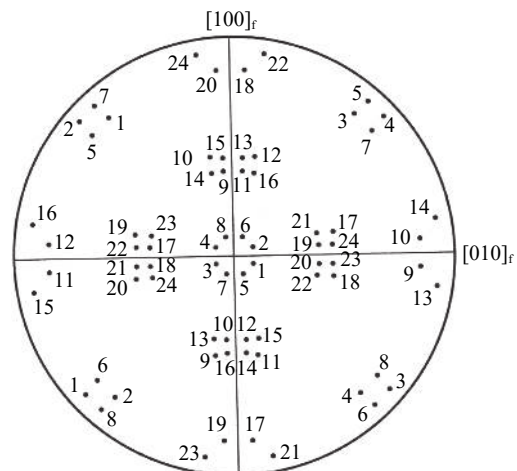


图 19 面心立方晶体立方取向时按 K-S 取向关系转变的 24 个体心立方新相的取向位置, {100}极图

制变形或退火相变时哪些变体优先出现，我们多次观察到的是第一组优先出现^[11-12]。

多晶体的择优取向问题几乎总是借助于极射赤面投影来分析解决的。此外单晶体和某些多晶体中的一些有方向性的力学或物理性质，如弹性模量、屈服点和导电率等，可以在极射赤面投影上用图解法表示。

结束语

极射投影法是直观的三维方向关系表达法，极射投影图使其变为二维纸面上的关系；涉及的领域从天体学、地理学、航行测绘、地质学、晶体学、材料科学、数学等；在尺度上从纳米尺度的晶体单胞到工件、微电子器件到矿物岩石、山体滑坡到地震灾害、地球太阳到宇宙。在时间上从古至今，在地域上遍及各大洲，离我们那么远又那么近，只要有心，那就是那么有趣。人既要在某一方面深入下去，也要有对多领域的了解，提高触类旁通的能力。

参考文献

- [1] 杨平. 材料科学名人典故与经典文献. 北京: 高等教育出版社, 2016
- [2] 余永宁. 材料科学基础. 北京: 高等教育出版社, 2012
- [3] Howarth R J. History of the stereographic projection and its early use in geology. *Article First Published Online*: 1-7-2007. DOI: [10.1111/j.1365-3121.1996.tb00779.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-3121.1996.tb00779.x)
- [4] Schmidt W. Statische methoden beim gefügestudium kristalliner Schiefer. *Sber. Bayer Akad Wiss.*, 1917, 126: 515
- [5] Wever F. Über die Walzstruktur kubisch kristallisierender Metalle. *Z Phys A*, 1924, 28(1): 69
- [6] Shechtman D, Blech I, Gratias D, et al. Metallic phase with long-range orientational order and No translational symmetry. *Phy Rev Letters*, 1984, 53(20): 1951
- [7] 杨平, 毛卫民. 工程材料结构原理. 北京: 高等教育出版社, 2011
- [8] 秦善. 晶体学基础. 北京: 北京大学出版社, 2004
- [9] Därmann C. *Entwicklung der Textur und Mikrostruktur bei der Verformung und Rekristallisation von Eisen-3% Silizium* [Dissertation]. Germany: Aachen University, 1983
- [10] Yang P, Engler O. The formation of twins in recrystallized binary Al-1.3%Mn. *Materials Characterization*, 1998, 41: 165
- [11] Liu T Y, Yang P, Meng L, et al. Influence of austenitic orientation on martensitic transformations during compression of a high manganese steel. *Journal of Alloy and Compounds*, 2011, 509: 8337
- [12] Xie L, Yang P, Zhang N, et al. Formation of {100} textured columnar grain structure in a non-oriented electrical steel by phase transformation. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2014, 356: 1

基金项目: 北京科技大学本科教育教学改革项目(JG2017M08)。

作者简介: 杨平, 博士, 北京科技大学材料学院终身教授, 博士生导师。1982年获得北京科技大学材料专业学士学位; 1986年获得北京科技大学材料专业硕士学位; 1997年获德国亚琛工业大学金属学与金属物理所材料科学博士学位。主要研究方向为金属材料形变、再结晶、相变过程的晶体学行为及织构控制技术, 擅长使用电子背散射衍射(EBSD)技术。研究材料集中在各类钢(电工钢及高锰TRIP/TWIP钢)、钛合金、铝合金、镁合金。负责国家自然科学基金6项, 参加国家863计划3项, 国家973计划项目1项, 配套项目1项, 国家自然科学基金重点项目1项。负责企业横向课题10余项等。在国内外期刊发表科学研究论文403篇, 获发明专利4项, 获省部级一等奖、三等奖各1项, 编著《电子背散射衍射技术及其应用》《材料织构分析原理与检测技术》《电工钢的材料科学原理》。获得北京市教学名师、北京市师德先进个人、宝钢优秀教师奖、北京市教学成果一等奖1项和二等奖2项、北京科技大学鼎新学者。编著《材料科学名人典故与经典文献》《工程材料结构原理》, 参编教材《材料科学基础》(“十二五”国家规划教材)、《材料科学与工程基础》、《金相实验基础》等。讲授本科生课程《材料科学基础》(国家精品课程、国家精品资源共享课、研究型教学示范课堂), 讲授研究生课程《材料结构》。发表教学研究论文37篇。